



Critères de raffinement pour le chaos polynomial multi-éléments. Application au pompage énergétique acoustique

Benjamin Chouvion, Emmanuelle Sarrouy

► To cite this version:

Benjamin Chouvion, Emmanuelle Sarrouy. Critères de raffinement pour le chaos polynomial multi-éléments. Application au pompage énergétique acoustique. 12e Colloque National en Calcul des Structures, May 2015, Presqu'île de Giens, France. hal-01174374

HAL Id: hal-01174374

<https://hal.science/hal-01174374>

Submitted on 9 Jul 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Critères de raffinement pour le chaos polynomial multi-éléments. Application au pompage énergétique acoustique.

B. Chouvion^{1*}, E. Sarrouy¹

¹ LMA, UPR CNRS 7051, Ecole Centrale Marseille

* maintenant au LTDS, UMR CNRS 5513, Ecole Centrale Lyon, benjamin.chouvion@ec-lyon.fr

Résumé — Cet article propose différentes solutions pour créer une partition adaptative de l'espace stochastique dans le cadre du chaos polynomial multi-éléments. Deux méthodes sont proposées et comparées en termes de précision et de rapidité à la méthode utilisée classiquement. Le chaos polynomial multi-éléments est ensuite appliqué à un problème de pompage acoustique et l'influence de paramètres incertains sur le déclenchement du pompage est étudiée.

Mots clés — chaos polynomial, MEgPC, pompage énergétique.

1 Introduction

Lors de la mise en place de modèles, il faut bien souvent pouvoir prendre en compte certaines variabilités, provenant par exemple de dispersion dans les caractéristiques des matériaux utilisés. Parmi les approches probabilistes [5], le chaos polynomial (PC) repose sur l'approximation des quantités stochastiques par expansion sur une base de polynômes [3, 4, 11] selon l'idée originale proposée par Wiener [10]. Il se différencie par son efficacité et son faible coût numérique de la méthode de Monte Carlo qui s'appuie sur le calcul direct d'un grand nombre de réalisations. Cependant, si la réponse montre des points de singularité dans l'espace stochastique, celle-ci sera très difficilement approchée par un unique polynôme. Une solution possible est alors de discrétiser l'espace stochastique et d'utiliser des approximations polynomiales de faible degré sur chacun des éléments créés. C'est ce que l'on appelle le chaos polynomial multi-éléments (MEgPC ou MEPCM) [6, 9]. Cette dernière méthode reposant sur des polynômes de faible degré permet aussi de s'affranchir des erreurs numériques commises lors du calcul de ces polynômes pour des degrés élevés. Tout comme lors de la mise en place du maillage pour une modélisation éléments finis, se pose alors la question de la taille des éléments. Les caractéristiques de régularité des valeurs de sortie étant difficilement prévisibles *a priori*, mettre en place un maillage (ou partitionnement) de manière adaptative est certainement le plus pertinent ; ceci implique de se doter d'un critère d'erreur permettant de statuer sur le besoin de raffiner la partition. Différents critères d'erreurs sont ainsi proposés dans cet article et comparés à celui initialement proposé par Wan et Karniadakis [9]. Après comparaison sur un oscillateur de Duffing incertain, ces méthodes sont appliquées à l'étude stochastique de l'efficacité d'un système de pompage acoustique à membrane.

2 Théorie et développements

Dans cette partie, des éléments théoriques sur la mise en place du chaos polynomial multi-éléments sont brièvement rappelés. Ceux-ci sont suivis de la présentation de différents critères d'erreurs pour la création d'une partition adaptative. Ces écritures sont proposées pour le cas d'une seule variable aléatoire ξ utilisée pour introduire l'aléa dans les paramètres du système.

2.1 Le chaos polynomial multi-éléments

Dans la méthode du PC, un processus aléatoire U est approché par une série polynomiale en utilisant des polynômes orthogonaux ψ_k ($0 \leq k \leq p$) fonctions de ξ , la variable aléatoire. p est l'ordre d'expansion,

et le produit scalaire associé sera noté $\langle \bullet, \bullet \rangle$. Le processus aléatoire approché s'écrit alors :

$$U(\xi) = \sum_{k=0}^p u_k \psi_k(\xi),$$

où u_k sont les coefficients (déterministes) de l'expansion polynomiale. Il est pertinent de choisir la base polynomiale à utiliser en fonction de la distribution de la variable aléatoire [3, 11], et on retiendra pour la suite de cet article le couple loi uniforme, polynômes de Legendre.

L'approche MEgPC, dont on pourra retrouver une écriture formelle et détaillée dans [9], est fondée sur la mise en place d'une approximation polynomiale par morceaux et donc pour cela sur le découpage de l'espace stochastique en différents éléments (notés I_n). Sur chacun d'eux, est alors appliqué le PC avec un ordre d'expansion réduit. Le processus aléatoire U est ainsi approximé sur chacun des éléments I_n par U_n tel que :

$$U_n = \sum_{k=0}^{p_n} \tilde{u}_{k,n} \psi_k(\zeta_n),$$

où ζ_n est la variable aléatoire locale d'image $[-1, 1]$ et définie par transformation affine de ξ , lorsque ξ varie entre les bornes de l'élément I_n .

Lors de la mise en place de cette méthode MEgPC, la plus grande difficulté réside dans la création adaptative des éléments. En dehors de la question de la méthode de partitionnement (où diviser les éléments ? – on utilisera la méthode simple qui consiste à couper un élément en deux parties égales) qui ne sera pas abordée ici, se pose aussi la question sur le critère d'erreur à utiliser (comment définir si un élément a besoin d'être raffiné ou non ?).

2.2 Les critères d'erreur pour un partitionnement adaptatif

2.2.1 Erreur sur la convergence de la variance

Le critère d'erreur proposé originellement par Wan et Karniadakis [9] prend en compte le taux de décroissance de l'erreur locale relative en variance lorsque l'ordre de l'approximation polynomiale ou le nombre d'éléments augmente. Pour chacun des éléments, ils définissent le taux de décroissance de l'erreur locale comme :

$$\eta_n^\top = \frac{\tilde{u}_{p,n}^2 \langle \psi_p, \psi_p \rangle}{\sigma_{U_n}^2} = \frac{\tilde{u}_{p,n}^2 \langle \psi_p, \psi_p \rangle}{\sum_{k=1}^p \tilde{u}_{k,n}^2 \langle \psi_k, \psi_k \rangle},$$

où $\sigma_{U_n}^2$ est la variance locale. Ce taux de décroissance montre donc l'influence du terme de plus haut degré (en p) sur la valeur de la variance locale. Lorsque cette erreur locale, pondérée par la longueur de l'élément correspondant, est supérieure à une valeur seuil prédéfinie, l'élément est considéré comme insatisfaisant et est divisé.

Un inconvénient majeur évident de ce critère est qu'il sera "leurré" lorsque la fonction à approximer présente des caractéristiques de symétrie. Par exemple, si $U(\xi)$ est paire et que l'on utilise une décomposition sur le chaos avec un degré impair, le terme de plus haut degré (correspondant donc à un polynôme présentant une caractéristique impaire) sera nul. Par conséquent l'erreur sur cet élément sera aussi nulle et l'approximation sera considérée parfaite alors qu'elle ne l'est (potentiellement) pas. Cet inconvénient nous a amené à développer deux autres critères d'erreurs qui sont rapidement présentés ci-dessous.

Le premier critère d'erreur alternatif que nous proposons est basé sur l'erreur, créée par le partitionnement, sur la continuité d'un paramètre lié à la variance. En prenant pour hypothèse que la fonction aléatoire de sortie $U(\xi)$ est au moins C^1 sur tout son intervalle de définition, il peut être montré que la valeur \hat{g}_n définie telle que $\hat{g}_n = \sigma_{U_n}/L_n$, où L_n est la longueur de I_n , peut être vue comme une approximation d'ordre 0 sur I_n de la fonction continue g définie par :

$$g(\xi) := \frac{\sqrt{3}}{6} \left| \frac{dU(\xi)}{d\xi} \right|.$$

Puisque la fonction g ne peut pas être évaluée sous cette définition, on utilise alors une technique de lissage linéaire, similaire à ce qui est fait en élément finis [12], pour reconstruire une fonction continue

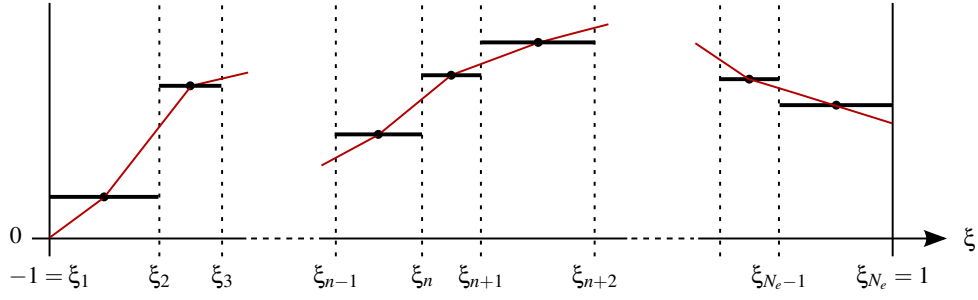


FIGURE 1 – Illustration du premier critère proposé : — : \hat{g}_n ; — : \tilde{g} ; ξ_n, ξ_{n+1} : bornes de l'élément I_n

\tilde{g} à partir de la fonction constante par morceaux \hat{g}_n (cf. Figure 1). L'erreur sur un élément est alors définie comme l'intégrale de la valeur absolue de la différence entre ces deux fonctions. Si cette erreur est supérieure à une valeur seuil, l'élément est découpé.

2.2.2 Utilisation de l'erreur en résidu

Le deuxième critère d'erreur proposé est le suivant : lorsqu'une approximation par PC est effectuée sur un élément de l'espace stochastique, il est possible d'évaluer l'erreur avec la solution réelle en regardant l'erreur en résidu que cette approximation amène dans le système d'équations de départ. Si on a affaire à un système d'équations algébriques du type $H(U) = 0$, l'insertion d'une variable aléatoire ξ et l'approximation polynomiale sur U créent un résidu R défini simplement par $R(U, \xi) = H(U, \xi)$. Ce résidu, calculé sur chacun des éléments, est fonction de ξ .

Le critère d'erreur proposé est alors, pour l'élément I_n , la valeur de l'intégrale du résidu sur l'intervalle correspondant à I_n , pondérée par L_n . On obtient ainsi une erreur par élément et si cette erreur est supérieure à un seuil prédéfini, l'élément n'est pas satisfaisant. Pour ce critère d'erreur, la valeur seuil à utiliser peut d'ailleurs être corrélée à la valeur de tolérance acceptée dans des algorithmes de résolution numérique du système $H(U) = 0$. Un critère similaire peut aussi être utilisé pour des équations différentielles stochastiques.

2.2.3 Comparaison

Les différents critères d'erreur sont appliqués à un système non-linéaire représentant un oscillateur de Duffing incertain sous excitation périodique. L'aléa est inséré dans la valeur de la raideur non-linéaire sous forme d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme. Le système est décrit par la méthode de balance harmonique (HBM) avec un seul harmonique. L'ordre d'approximation polynomiale de chacun des éléments est fixé à $p = 2$. La méthode MEgPC est alors appliquée en utilisant les différents critères d'erreur proposés précédemment, et les résultats sont comparés à une simulation de Monte Carlo faite avec un million de tirages.

Suivant les seuils utilisés pour chacun des critères d'erreur, le raffinement automatique va créer des partitions avec plus ou moins d'éléments. La Figure 2 représente ainsi l'erreur de l'approximation obtenue en fonction du nombre d'éléments dans la partition finale. Les courbes 2.(a) et 2.(b) illustrent respectivement l'erreur sur la moyenne et sur la variance en fonction du nombre d'éléments pour chacune des méthodes. La courbe 2.(c) représente, également en fonction du nombre d'éléments dans la partition, la distance de Wasserstein [8, Chap. 6] entre la distribution de référence calculée à partir des simulations de Monte Carlo et celle obtenue à partir de l'approximation MEgPC utilisant l'un des trois critères de partitionnement.

La distance de Wasserstein présente l'avantage de pouvoir comparer la qualité des distributions dans leur globalité et non pas seulement celle des deux premiers moments. Ce sont en effet les distributions des différentes grandeurs d'intérêt qui vont majoritairement être utilisées lors du post-traitement des résultats et il nous semble intéressant de ne pas se contenter d'une comparaison des premiers moments. Nous utilisons ici une version adimensionnée de cette distance, notée W_d , qui se calcule comme suit :

$$W_d(U, U_{\text{ref}}) = \left(\frac{\int_0^1 (F_U^{-1}(t) - F_{U_{\text{ref}}}^{-1}(t))^2 dt}{\sigma_{U_{\text{ref}}}^2} \right)^{1/2} \quad (1)$$

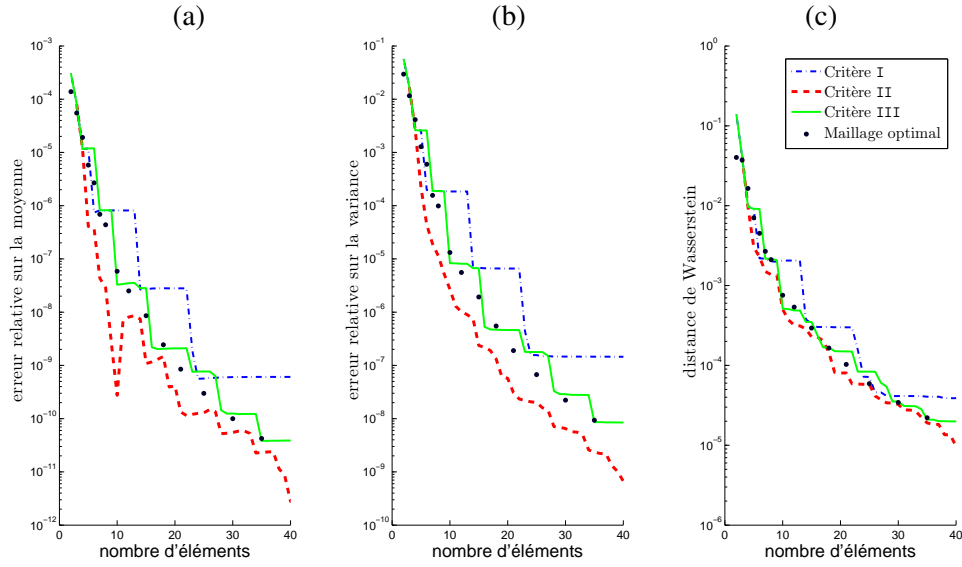


FIGURE 2 – Convergence en fonction du nombre d’éléments. Erreurs relatives sur (a) la moyenne, (b) la variance, ainsi que (c) distance de Wasserstein pour différents critères (I : critère Wan et Karniadakis [9], II : critère sur la continuité de la variance, et III : critère sur l’erreur en résidu).

où F_X désigne la fonction de répartition de X .

Quelle que soit l’erreur regardée, on remarque que les deux critères proposés présentent de meilleurs résultats que le critère original I : l’erreur est plus faible et la décroissance plus régulière (on ne décroît pas par larges paliers).

3 Mise en application au pompage énergétique

Le système étudié ici est basé sur un montage expérimental qui a démontré le phénomène de pompage acoustique [2]. Dans ce montage, une cavité fluide est couplée à un oscillateur vibro-acoustique non-linéaire constitué d’une fine membrane circulaire visco-élastique encastrée sur ses bords. Cette membrane constitue une raideur essentiellement cubique lorsqu’elle est déformée transversalement et joue alors le jeu principal de l’absorbeur non-linéaire. La mise en place des équations non-linéaires qui caractérisent le comportement du pompage acoustique est détaillée dans les travaux [1] et [7]. Le système peut se réduire à un système mécanique à deux degrés de libertés présentant une raideur et un terme d’amortissement non-linéaires :

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{d\tau^2} + \lambda \frac{du}{d\tau} + u + \beta(u - q) = F \cos\left(\frac{\Omega}{\omega_1} \tau\right) \\ \gamma \frac{d^2 q}{d\tau^2} + c_1 \left(\left(\frac{f_1}{f_0} \right)^2 q + \eta \omega_1 \frac{dq}{d\tau} \right) + c_3 \left(2\eta \omega_1 q^2 \frac{dq}{d\tau} + q^3 \right) = \beta(u - q) \end{cases} \quad (2)$$

où les degrés de liberté sont u qui désigne le déplacement adimensionné de l’air contenu dans le tube et q qui désigne le déplacement adimensionné de la membrane. $\omega_1 = c_0 \pi / L$ est la première pulsation propre du tube et $\tau = \omega_1 t$ est le temps adimensionné. La signification physique des autres paramètres du système d’équations (2) pourra être trouvée dans [1]. Dans les simulations numériques présentées ci-dessous, nous utiliserons les valeurs suivantes pour le système nominal (déterministe) : $\omega_1 = 86.74 \times 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$, $\lambda = 0.014$, $\beta = 0.118$, $F = 1.56$, $\gamma = 0.503$, $c_1 = 9.16 \times 10^{-4}$, $f_1/f_0 = 12.69$, $\eta = 0.001 \text{ s}$, et $c_3 = 8.5 \times 10^{-4}$.

Il a été montré récemment [7] que la zone effective de pompage acoustique peut être repérée en regardant la forme de la courbe représentant l’amplitude des cycles limites en fonction de la fréquence d’excitation, et pour différentes amplitudes d’excitation. Le système non-linéaire est donc abordé par HBM afin d’en extraire les cycles limites, et il est étudié plus en détails la zone où se trouve trois extrema, zone pour laquelle on est sûr d’avoir pompage acoustique [7]. Lors des corrélations entre essais et simulations numériques [1], il a été remarqué que la valeur de la viscosité de la membrane, notée η

dans (2), était difficilement quantifiable. De plus, celle-ci fluctuait de manière importante d'une membrane à l'autre, mais aussi sous l'effet de la température ou du vieillissement. Il paraît alors judicieux de rendre ce paramètre aléatoire en entrée du modèle et d'étudier son influence sur le phénomène de pompage acoustique.

Les résultats présentés dans la Figure 3 ont été obtenus pour une distribution uniforme de η autour de sa valeur nominale, avec une variabilité maximale de $\pm 50\%$. Il est illustré dans cette figure l'amplitude des degrés de libertés calculée avec la méthode HBM mono-harmonique en fonction de la fréquence d'excitation. Les courbes bleutées représentent la dispersion possible de la valeur calculée, et ainsi l'influence de la variable aléatoire. Celles-ci ont été simulées avec la méthode MEgPC pour un degré polynomial égal à 4 et le critère d'erreur en résidu avec une valeur seuil de 10^{-6} . Suivant une ligne bleue, la valeur de la différence de phase entre l'excitation et la réponse de la membrane q est constante. Le nombre d'éléments nécessaires par ligne bleue varie entre 1 et 5.

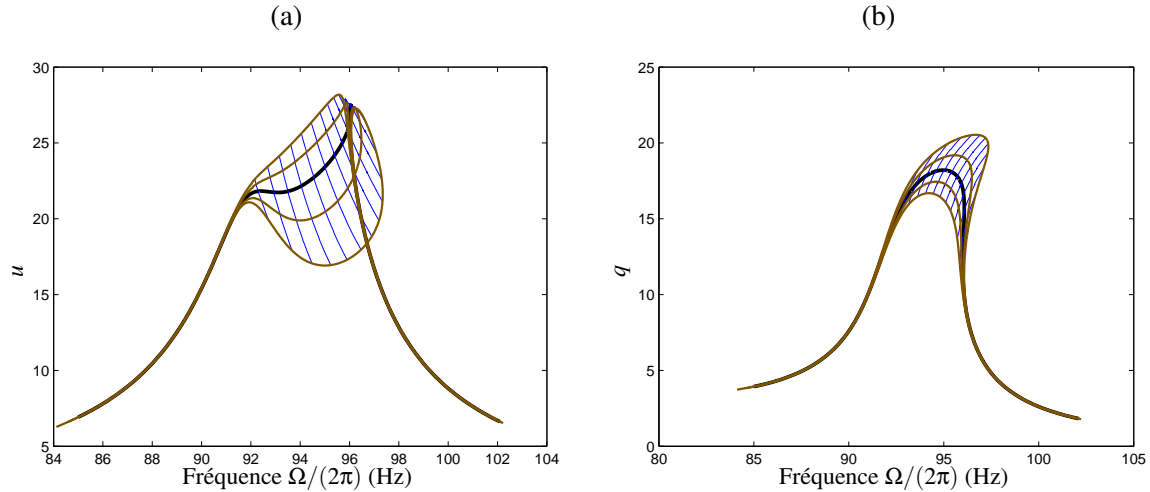


FIGURE 3 – (a) Déplacement de l'air et (b) déplacement du centre de la membrane en fonction de la fréquence d'excitation. Réponse nominale en noir. En marron, 4 tirages reconstruits depuis les résultats MEgPC.

Il est intéressant de voir que l'influence de la viscosité sur la réponse est la plus importante précisément dans la zone d'intérêt pour le pompage acoustique et qu'au vu des quelques tirages reconstruits, il peut y avoir, ou ne pas y avoir, pompage.

Un post-traitement de ces résultats permet d'établir la probabilité que le pompage se déclenche pour une fréquence donnée. Celle-ci est illustrée en Figure 4. Sur la zone centrale (entre 92 et 96 Hz environ), il y a approximativement 50% de chance de déclencher un régime quasi-périodique et donc un pompage effectif. Sur la zone suivante (entre 96 et 98 Hz), l'interprétation des résultats est plus complexe. Il peut en effet y avoir, pour des valeurs de ξ telles qu'un retournement de la courbe soit observé, plusieurs types de solutions qui coexistent à fréquence donnée.

Ce phénomène est illustré dans la Figure 5. La courbe de réponse peut, dans ces cas particuliers de retournement, se diviser en trois parties : celle dans le prolongement de la courbe issue des basses fréquences (partie 1 sur la figure), celle issue des hautes fréquences (partie 3) et une portion de courbe reliant les deux. Le pompage est, dans ces cas, certain [7] sur la partie 1 et la portion de partie 2 allant jusqu'à l'extremum désigné par un point noir. Ainsi, sur la partie droite du point noir, il y a alors potentiellement, pour chaque fréquence d'excitation, "2 solutions périodiques instables" (traits rouge et vert) pour une solution stable (trait noir). Sachant que les solutions périodiques instables sont sources de pompage, ceci peut expliquer que l'on trouve une probabilité deux fois supérieure d'atteindre un régime de pompage effectif dans cette zone. Ceci étant dit, *in situ*, la branche dont dépendrait le système dépend des conditions initiales et cette probabilité forte de déclencher le pompage est à considérer avec précaution. Ces résultats soulignent le fait que l'interprétation et donc l'usage possible des nombreuses données provenant du traitement de systèmes incertains et non-linéaires ne sont pas toujours aisés.

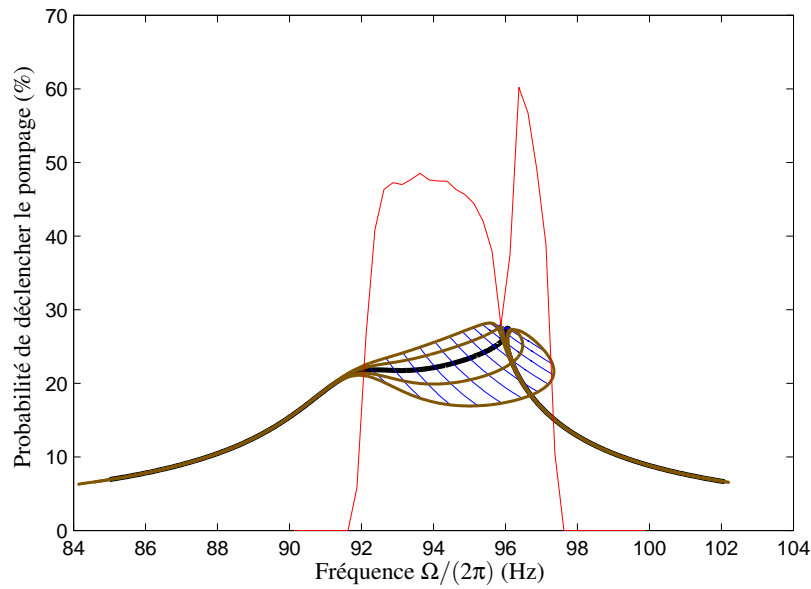


FIGURE 4 – Probabilité de déclencher le pompage en fonction de la fréquence d’excitation (courbe —).

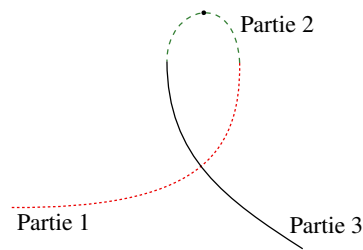


FIGURE 5 – Solutions multiples dans la zone [96 ; 98] Hz.

4 Conclusion

Dans cet article, deux nouveaux critères d’erreur pour un partitionnement adaptatif de l’espace stochastique ont été proposés. Ceux-ci ont été comparés avec le critère originalement utilisé par Wan et Karniadakis et ont montré des caractéristiques de robustesse et de convergence plus efficaces. De plus, la valeur maximale affectée au critère basé sur l’erreur en résidu ne demande pas à être trouvée de manière empirique, et ceci permet de lui donner plus de sens. Ces critères ont été appliqués à un système de pompage acoustique pour décrire la probabilité de déclencher ce pompage en environnement incertain, et ceci a notamment permis d’illustrer la difficulté d’interprétation des phénomènes issus de systèmes à la fois non-linéaires et stochastiques.

Remerciements

Ces travaux ont été réalisés au LMA grâce au financement du LabEx Mécanique et Complexité. Les auteurs remercient tout particulièrement Bruno Cochelin pour ses conseils sur le pompage acoustique.

Références

- [1] R. BELLET : *Vers une nouvelle technique de contrôle passif du bruit : absorbeur dynamique non linéaire et pompage énergétique*. Thèse de doctorat, Université de Provence – Aix-Marseille I, 2010.
- [2] R. BELLET, B. COCHELIN, P. HERZOG et P.-O. MATTEI : Experimental study of targeted energy transfer from an acoustic system to a nonlinear membrane absorber. *Journal of Sound and Vibration*, 329(14):2768 – 2791, 2010.

- [3] O. G. ERNST, A. MUGLER, H.-J. STARKLOFF et E. ULLMANN : On the convergence of generalized polynomial chaos expansions. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 46:317–339, 3 2012.
- [4] R. GHANEM et Pol D. SPANOS : *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Springer-Verlag, 1991.
- [5] A. NOUY : Recent developments in spectral stochastic methods for the numerical solution of stochastic partial differential equations. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 16(3):251–285, 2009.
- [6] E. SARROUY, O. DESSOMBZ et J.-J. SINOÛ : Piecewise polynomial chaos expansion with an application to brake squeal of a linear brake system. *Journal of Sound and Vibration*, 332:577–594, 2013.
- [7] J. SHAO et B. COCHELIN : Theoretical and numerical study of targeted energy transfer inside an acoustic cavity by a non-linear membrane absorber. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 64:85 – 92, 2014.
- [8] Cédric VILLANI : *Optimal transport. Old and new*, volume 338 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [9] X. WAN et G. E. KARNIADAKIS : An adaptive multi-element generalized polynomial chaos method for stochastic differential equations. *Journal of Computational Physics*, 209(2):617 – 642, 2005.
- [10] N. WIENER : The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4):897–936, 1938.
- [11] D. XIU et G. E. KARNIADAKIS : The wiener–askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(2):619–644, 2002.
- [12] O. C. ZIENKIEWICZ et J. Z. ZHU : A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2):337–357, 1987.